République Tunisienne

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2021

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2021

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Session 2021	Date : 21/06/2021	Heure : 8H	Durée : 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Notations et objectifs

Dans tout le problème, on considère les notations suivantes :

- $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
- $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que f et sa dérivée f' sont bornées. On munit cet espace par la norme N définie par $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
- $\mathbb{1}$ la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1.
- Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on définit, sous réserve d'existence, le réel

$$\mathcal{I}_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

et la fonction Φ_f définie par

$$\Phi_f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} f(t) e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés du réel $\mathcal{I}_f$ et la fonction Φ_f pour des fonctions dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$. Dans la dernière partie, on propose une preuve d'une version faible du théorème centrale limite sur un exemple de marche aléatoire.

Préliminaires (5,5 points)

1. **Calcul de $\mathcal{I}_{\mathbb{1}}$.**
   Soit $\alpha = \int_0^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ et $\mathcal{F}$ la fonction définie par

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(1+s^2)\frac{x^2}{2}}}{1+s^2} ds, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\mathcal{F}(x)=0$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x>0$, $\mathcal{F}'(x)=-\alpha e^{\frac{-x^2}{2}}$. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{F}(x)=-\alpha\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt+\frac{\pi}{2}.$$

(c) Déterminer la valeur de α, en déduire que $\mathcal{I}_{\mathbb{1}}=1$.

2. **Exemples de $\mathcal{I}_f$.**

(a) Justifier que l'intégrale $\mathcal{I}_f$ converge pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et que $\left|\mathcal{I}_f\right|\leq\|f\|_\infty$. En déduire que

$$\mathcal{H}=\left\{f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R});\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0\right\}$$

est un hyperplan fermé de l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

(b) On considère la suite de fonctions $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f_0=\mathbb{1}$ et $f_n(x)=x^{2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{I}_{f_n}$ est bien définie pour tout n et déterminer une relation entre $\mathcal{I}_{f_n}$ et $\mathcal{I}_{f_{n+1}}$. En déduire que, $\mathcal{I}_{f_n}=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(c) On considère la fonction f définie par $f(x)=\cos(\pi x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. En utilisant le développement en série entière de f, montrer que $\mathcal{I}_f=e^{\frac{-\pi^2}{2}}$.

3. **Etude de $\Phi_{\mathbb{1}}$.**

(a) Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $e^{\frac{-t^2}{2}}\underset{+\infty}{\sim}\psi'(t)$, où $\psi(t)=-\dfrac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{t}$.

En déduire que $\Phi_{\mathbb{1}}(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$.

(c) Justifier l'existence de deux constantes réelles M et M′ telles que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$:

$$|\Phi_{\mathbb{1}}(x)|\leq \mathrm{M}\qquad\text{et}\qquad|x\Phi_{\mathbb{1}}(x)|\leq \mathrm{M}'.$$

Un endomorphisme de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (4 points)

4. Soit f une fonction de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que Φ_f est bien définie et que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$,

$$\left|\Phi_f(x)\right|\leq \mathrm{M}\|f\|_\infty\quad\text{et}\quad\left|x\Phi_f(x)\right|\leq \mathrm{M}'\|f\|_\infty.$$

(b) On suppose dans cette question seulement que $f\in\mathcal{H}$.

Soit $\widetilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\widetilde{f}(x)=f(-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout réel x, $\Phi_f(-x)=-\Phi_{\widetilde{f}}(x)$. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\Phi_f(x)\right|\leq \mathrm{M}\|f\|_\infty\quad\text{et}\quad\left|x\Phi_f(x)\right|\leq \mathrm{M}'\|f\|_\infty.$$

Dans la suite, on désigne par T_f la fonction $T_f = \Phi_{f-\mathcal{I}_f\mathbb{1}}$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} (f(t) - \mathcal{I}_f) e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

5. Montrer que $\left|T_f(x)\right| \leq 2\mathrm{M} \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déduire que l'application $T : f \longmapsto T_f$ définit un endomorphisme continue de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
6. Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que T_f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée T_f' vérifie

   $$T_f'(x) = xT_f(x) - f(x) + \mathcal{I}_f, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (b) Résoudre, à l'aide de T_f, l'équation différentielle

   $$y' = xy - f(x) + \mathcal{I}_f.$$

7. Justifier que $\left|T_f'(x)\right| \leq 2(\mathrm{M}' + 1) \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Déduire que $T_f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. L'endomorphisme T est il surjectif? Justifier la réponse.

Etude spectrale de T (3,5 points)

On se propose dans cette partie d'étudier l'endomorphisme T.

8. Montrer que 0 est une valeur propre de T et déterminer le sous espace propre associé.
9. Montrer que toute valeur propre λ de T vérifie $|\lambda| \leq 2\mathrm{M}$.
10. On fixe une fonction $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et un réel λ vérifiant $|\lambda| \leq \dfrac{1}{2\mathrm{M}+1}$. On se propose de montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation intégrale suivante :

    $$h(x) = f(x) - \lambda e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} (f(t) - \mathcal{I}_f) e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

    On définit l'application $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}(f) = h + \lambda T_f$, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.
    (a) Montrer qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tous $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ on a

    $$|\mathcal{S}(f)(x) - \mathcal{S}(g)(x)| \leq k \|f - g\|_\infty, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

    On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0 = 0$ et $f_{n+1} = \mathcal{S}(f_n)$.
    (b) Justifier que pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq k^n \|h\|_\infty$. En déduire que la série $\sum_n (f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on notera f sa somme.
    (c) Montrer que f vérifie l'équation (2).

Restriction de T à $\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ (2 points)

11. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ alors T_f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout réel x, sa dérivée seconde $T_f''(x)$ en fonction de $xT_f'(x)$, $T_f(x)$ et $f'(x)$.

On admet dans la suite l'existence d'un réel C_1 tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$

$$\left|xT_f'(x)\right| \leq C_1 N(f), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

12. Soit $C = \max(2M, 1) + C_1$. Justifier que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$,

$$\left|T_f''(x)\right| \leq C\, N(f).$$

En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ et pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|T_f'(x) - T_f'(y)\right| \leq C\, N(f)\, |x - y| \tag{3}$$

et

$$\left|T_f(x) - T_f(y) - (x-y)T_f'(y)\right| \leq \frac{C\, N(f)}{2}(x-y)^2 \tag{4}$$

Applications (5 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et $\mathcal{M}_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(\mathcal{M}_n)$ et la variance $\mathbb{V}(\mathcal{M}_n)$ de la variable $\mathcal{M}_n$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|\mathcal{M}_n| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.
14. Justifier que $S_n(\Omega) = \{2k - n;\ 0 \leq k \leq n\}$ et que

$$P(S_n = 2k - n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k},$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.

15. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{I}_f - \mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) = \mathbb{E}(T_f'(\mathcal{M}_n)) - \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)).$$

On se propose de démontrer dans la suite que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On fixe $f \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on définit la variable aléatoire $\mathcal{M}_{n,i} = \mathcal{M}_n - \dfrac{X_i}{\sqrt{n}}$.

16. En utilisant l'inégalité (4), montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\left| X_i T_f(\mathcal{M}_n) - X_i T_f(\mathcal{M}_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}} T_f'(\mathcal{M}_{n,i}) \right| \leq \frac{C N(f)}{2n} |X_i|^3$$

et déduire que

$$\left| \mathbb{E}(X_i T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}(T_f'(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \leq \frac{C N(f)}{2n}.$$

17. Montrer alors que

$$\left| \mathbb{E}(\mathcal{M}_n T_f(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_f'(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \leq \frac{C N(f)}{2\sqrt{n}}.$$

18. En utilisant l'inégalité (3), montrer de même que

$$\left| \mathbb{E}(T_f'(\mathcal{M}_n)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_f'(\mathcal{M}_{n,i})) \right| \leq \frac{C N(f)}{\sqrt{n}}.$$

19. En déduire que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(\mathcal{M}_n)) = \mathcal{I}_f$.

20. Etablir que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\pi(\frac{2k}{\sqrt{n}} - \sqrt{n})) = e^{-\frac{\pi^2}{2}}.$$

Fin de l'énoncé